ПРО ВІДОКРЕМЛЕННЯ ПОВЕРХНІ ПРУЖНОЇ БАГАТОШАРОВОЇ ОСНОВИ ВІД ШТАМПУ З ПЛОСКОЮ ПОДОШВОЮ

Приварников А.К.
Столярчук І.А.
Україна, м. Запоріжжя, Запорізький національний університет

В статье описан способ решения задачи о неполном контакте плоского штампа с многослойным основанием. Получены достоверные численные результаты для конкретных задач об отставании штампа от основания с определением истинных областей контакта.

Постановка задачі. На верхню межу багатошарової основи діє періодична система однакових штампів з плоскими підошвами. Деформація основи вважається плоскою. Поза ділянками контакту поверхня основи не навантажена. При вдавлюванні в основу штампи переміщуються поступально нормально до її недеформованої поверхні незалежно один від одного. Сили тертя між штампами та поверхнею основи відсутні. Відома величина сили, що діє на будь-який штамп. Задача полягає у визначенні нормальних напружень на межі основи і ділянок контакту кожного штампу з основою. Багатошарова основа – це пакет n пружних однорідних ізотропних шарів, що лежить на пружному півпросторі. Кожний шар обмежено лиш двома паралельними площинами. Два будь-яких сусідніх шара основи можуть бути зчеплені або без тертя ковзати, не відокремлюючись, один по одному при деформації основи.

Аналіз публікацій. Для багатошарових основ переважно розглядалися неперіодичні контактні задачі [1-2, 6, 9]. Періодичним контактним задачам для багатошарових основ присвячені дослідження [4-5]. Відкритими залишалися питання про умови, при яких можливе відокремлення поверхні основи від плоскої підошви штампу, що занурюється в основу, яким способом визначити кількість ділянок контакту штампа з основою, як одержати вірогідні чисельні результати розв'язання конкретних контактних задач про відокремлення. У публікації автори пропонують спосіб розв'язання цих питань.

Вісь x декартової системи координат спрямуємо вздовж верхньої межі основи, вісь z спрямуємо вглиб основи. Вважаємо, що $2l$ – період розташування штампів на поверхні основи і що $[b, a]$, $-l < b < a < l$, – ділянка контакту одного з штампів з поверхнею основи, коли він торкається основи не деформуючи її. Рівняння профілю цього штампу у вихідному положенні має вигляд $z = f(x) = 0$. Вважаємо відомою силу Q, що діє на штамп у кінцевому положенні.

Сингулярне інтегральне рівняння першого роду для невідомого контактного тиску $q(x)$ в області контакту L має вигляд [1]

$$q\ f'(x)=0=\frac{p}{2l}\int_L q(t)ctg\frac{p(t-x)}{2l}dt-\int_L q(t)F(t-x)dt \qquad (1)$$

Константа q і функція $F(t)$ визначаються за формулами

$$q=\frac{p\,E_1}{2\left(1-n_1^2\right)},\quad F(t)=\frac{p}{l}\sum_{k=1}^{\infty}a_1\left(\frac{kp}{l}\right)e^{-2\frac{kp}{l}h_1}\sin\frac{kp\,t}{l}, \qquad (2)$$

де E_1, n_1, h_1 – модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона матеріалу верхнього шару основи і товщина цього шару; $a_1(p)$ – модифікована функція податливості основи [6].

Інтегральне рівняння потрібно доповнити умовою рівноваги штампу

$$\int_L q(x)dx=Q. \qquad (3)$$

Розглянемо спочатку випадок, коли область контакту штампа з основою є $[\,b,\,a\,]$. У цьому випадку шукана функція $q\,(x)$ в області контакту, має структуру [7]

$$q(x)=\frac{\tilde{q}(x)}{\sqrt{(x-b)\cdot(a-x)}}, \qquad (4)$$

де функція $\tilde{q}(x)$ неперервна на $[\,b,\,a\,]$ і, в наслідок цього, обмежена і інтегрована на $[\,b,\,a\,]$. Застосуємо до наближеного обчислення інтегралів в умовах (3) ефективну квадратурну формулу найвищого алгебраїчного степеня точності [7]

$$\int_b^a\frac{f(t)}{\sqrt{(t-b)\cdot(a-t)}}dt=\int_{-1}^{1}\frac{f\left(\frac{a-b}{2}u+\frac{a+b}{2}\right)}{\sqrt{1-u^2}}du\approx\frac{p}{M}\sum_{i=1}^{M}f(t_i) \qquad (5)$$

де

$$t_i=\frac{a-b}{2}\cos\frac{2i-1}{2M}p+\frac{a+b}{2},\quad i=1,\,2,\,\ldots\,,M\,. \qquad (6)$$

Умова (3) згідно з формулами (4) і (5) набуває вигляду (вузли t_i визначаються за (6))

$$Q\approx\frac{p}{M}\sum_{i=1}^{M}\tilde{q}(t_i), \qquad (7)$$

В інтегральному рівнянні контактної задачі (1) замінюємо функцію $q(x)$ новою невідомою функцією $\tilde{q}(x)$. Для наближеного розв'язання одержаного сингулярного інтегрального рівняння застосовуємо метод скінчених сум, що ґрунтується на квадратурній формулі (5) та квадратурній формулі найвищого алгебраїчного степеня точності [7, 8]:

$$\int_b^a\frac{\tilde{q}(t)}{\sqrt{(t-a)\cdot(b-t)}}ctg\frac{p(t-x_r)}{2l}dt\approx\frac{p}{M}\sum_{i=1}^{M}\tilde{q}(t_i)ctg\frac{p(t_i-x_r)}{2l}, \qquad (8)$$

де

$$x_r = \frac{a-b}{2}\cos\frac{p\,r}{M} + \frac{a+b}{2}a\cos\frac{p\,r}{M}, \quad r = 1, 2, \ldots, M-1. \tag{9}$$

Зауважимо, що формула (8) має найвищий алгебраїчний степінь точності лиш для *M-1* точок x_r інтервалу (*b, a*). У цій формулі вузли t_i визначаються за формулами (6), тобто збігаються з вузлами квадратурної формули (5) гаусового типу.

Змінній *x* будемо послідовно надавати значення x_r, $r = 1, 2, \ldots, M-1$, з інтервалу (a, b). Отримаємо $M-1$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих значень $\tilde{q}(t)$ у M вузлах (6) на (a, b). Доповнимо цю систему рівнянь рівнянням рівноваги штампу (7). Задача зведена до розв'язання системи M лінійних алгебраїчних рівнянь відносно M невідомих значень $\tilde{q}(t)$ у вузлах (6)

$$\frac{p}{2l}\sum_{i=1}^{M}\tilde{q}(t_i)ctg\frac{p(t_i - x_r)}{2l} - \sum_{i=1}^{M}\tilde{q}(t_i)F(t_i - x_r) = 0, \qquad \frac{p}{M}\sum_{i=1}^{M}\tilde{q}(t_i) = Q.$$

$$x_r = \frac{a-b}{2}\cos\frac{p\,r}{M} + \frac{a+b}{2}, \ , \ r = 1, 2, \ldots, M-1. \tag{10}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо за (4) наближені значення контактного тиску $q(t)$ у дискретній системі точок ділянки контакту штампа з межею багатошарової основи. У залежності від потрібної точності розв'язання конкретної контактної задачі оптимальне значення числа M визначається при математичних експериментах на ЕОМ.

Аналіз результатів чисельних експериментів показав, що при дії плоского штампу на основу, у якої модуль Юнга матеріалу верхнього шару значно більший ніж модуль Юнга нижчого шару, можливо відокремлення поверхні основи від підошви штампу. При зменшенні періоду розташування штампів явище відокремлення зникає.

Визначимо дійсну область контакту штампа з двошаровою основою (шар зчеплений з півплощиною). У системі (10) покладемо $L = [-a, a]$, $h_1 = a$, $E_1 / E_2 = 0.1$, $n_1 = n_2 = 0.3$. Розв'язок системи вказує на те, що контактний тиск у середній часті області L є від'ємним, тобто дійсна область контакту штампа з основою складається з двох ділянок контакту: $L = L_1 \cup L_2$, $L_1 = [-a, -b]$, $L_2 = [b, a]$. Межі $-b$ *і* b невідомі. За фізичним змістом контактний тиск в області контакту повинен бути додатнім і на межах $-b$ *і* b ділянок, що невідомі, він дорівнює нулю. З умов задачі завжди можна вказати область $\tilde{L} = \tilde{L}_1 \bigcup \tilde{L}_2$, $\tilde{L}_1 = [-a, -b']$, $\tilde{L}_2 = [b', a]$, що містить у собі область L. У задачі, що розглядається, $b' = 0.1a$. Контактний тиск в області $\tilde{L}$ не буде знакопостійним, в околі кінців $-b'$ *і* b' ділянок $\tilde{L}_1 = [-a, -b']$ і $\tilde{L}_2 = [b', a]$ він буде від'ємним.

В сингулярному інтегральному рівнянні (1) контактної задачі та умові (3) рівноваги штампу будемо вважати $L=\widetilde{L}$. На кожній ділянці $\widetilde{L}_1$ і $\widetilde{L}_2$ контактний тиск представимо у вигляді (4). Інтеграли по ділянкам $\widetilde{L}_1$ і $\widetilde{L}_2$ в умові (3) і несингулярні інтеграли в рівнянні (1) замінимо квадратурними сумами (5). Сингулярні інтеграли в інтегральному рівнянні замінимо квадратурними сумами (8). Отримаємо наближені рівняння відносно значень $\widetilde{q}(t)$ у вузлах t_i, що визначаються за формулою (6)

$$\frac{p}{2l}\sum_{i=1}^{M}\widetilde{q}(t_i)[ctg\frac{p(t_i-x_r)}{2l}-ctg\frac{p(t_i+x_r)}{2l}]-\sum_{i=1}^{M}\widetilde{q}(t_i)[F(t_i-x_r)-F(t_i+x_r)=0,\ \frac{2p}{M}\sum_{i=1}^{M}\widetilde{q}(t_i)=Q. \quad (11)$$

Вузли x_r, $r=1, 2, ..., M-1$, визначаються за формулою (9). У системі рівнянь (11) враховано, що функція $\widetilde{q}(t)$ є парною, $F(t)$– непарна функція і що вузли t_i і x_r для ділянок $\widetilde{L}_1$ і $\widetilde{L}_2$ відрізняються лиш знаком.

Збільшуючи b' і кожний раз розв'язуючи систему (11), можна визначити таке значення b', для якого $\widetilde{q}(b')=0$. Це значення b' і є значенням невідомої величини b, що визначає дійсну область контакту плоского штампа з двошаровою основою. Схожий спосіб визначення невідомих меж області контакту випуклого штампу з пружною півплощиною описано у монографії Н.І Мусхелішвілі [10]. Для задачі, що розглядається, шукане значення $b=0.176\,a$. У таблиці наведені значення контактного тиску на правій половині $[b, a]$ справжній області контакту плоского штампу з двошаровою основою.

Таблиця. Значення контактного тиску на справжній ділянці контакту

x/a	$\frac{aq(x)}{Q}$
0.1766	$9.88\cdot 10^{-6}$
0.2	0.01128
0.3	0.04624
0.4	0.09647
0.5	0.1691
0.6	0.2740
0.7	0.4297
0.8	0.6824
0.9	1.2112

Зауважимо, що описаний спосіб розв'язання задачі про неповний контакт плоского штампа з двошаровою основою без суттєвих змін можна застосовувати для будь-якої багатошарової основи зі скінченою кількістю пружних шарів і для випадків, коли дійсна область контакту штампа з такою основою складається з декількох ділянок.

Перелік посилань

1. *Ильман В.М., Приварников А.К. Плоская периодическая контактная задача для многослойного упругого основания // Вопросы прочности и пластичности. – 1971. – Днепропетровск. – С. 36 – 57.*
2. *Матузко Ю.О. Определение напряженно-деформированного состояния многослойного основания, на которое действует штамп // Теор. и прикл. механика. – 2003. – В. 38– С. 15-19.*
4. *Ильман В.М., Приварников А.К. Плоская периодическая контактная задача для многослойного упругого основания // Вопросы прочности и пластичности Днепропетровский ун-т – Днепропетровск. 1971. – С.36-57.*
5. *Столярчук І.А. Періодична контактна задача плоскої теорії пружності для багатошарових основ // Матеріали V Міжнародної науково-практичної конференції «Динаміка наукових досліджень – 2006». Том 7. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2006. – С. 11 – 16.*
6. *Приварников А.К., Ламзюк В.Д. Упругие многослойные основания // Днепропетровский университет. – Днепропетровск, 1985. – 162 с. – Деп. в ВИНИТИ 23.12.85, 8789 – В. 7.*
7. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацишин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наукова думка, 1976. – С. 72.*
8. *Приварников А.К. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности для особых интегралов // Задачи механики многослойных сред и их численная реализация. – Запорожье. – 2002. – С. 8 –14.*
9. *Александров О.І., Матузко Ю.О. Решение пространственной контактной задачи о вдавливании штампа в упругое основание // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. – 2003. – В. 7, т. 1. – С. 123 - 131.*
10. *Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.*